Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 15 — 06. Dezember 2022

Aufgabe 1: *(2+2+1 Punkte)* In dieser Aufgabe folgern wir *den Satz von Bolzano-Weierstrass in* $\mathbb{R}^n$ aus seiner eindimensionalen Version. Dazu sei $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ ausgestattet mit der Metrik $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$d(x,y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ und } y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nun sei $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $(\mathbb{R}^n, d)$. Wir verwenden im Folgenden die Notation

$$a_m = (a_{1,m}, \ldots, a_{n,m}) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{für } m \in \mathbb{N},$$

womit insbesondere die ℓ-te Komponente von a_m mit $a_{\ell,m}$ notiert wird, für $1 \leq \ell \leq n$.

Beweise die folgenden Behauptungen.

(a) Die Folge $(a_{\ell,m})_{m\in\mathbb{N}}$ der ℓ-ten Komponenten von $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$.

(b) Es gibt eine Teilfolge von $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass sowohl die Folge $(a_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ als auch die Folge $(a_{2,m})_{m\in\mathbb{N}}$ bezüglich dieser Teilfolge jeweils konvergieren.

(c) Konstruiere mit dem Resultat aus (b) eine konvergente Teilfolge für $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^n, d)$.

Lösung. (a): Sei $l \in \{1, \ldots, n\}$, dann berechnen wir

$$|a_{l,m}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{k,m}| = d(a_m, 0).$$

Da $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}^n$ ist, existiert ein $R > 0$ mit $d(a_m, 0) \leq R$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und damit auch

$$|a_{l,m}| \leq R \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

(b): Für $l = 1$ ist die Folge $(a_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}$ und nach Bolzano-Weierstrass existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{1,m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $a_{1,m_j} \longrightarrow a^{(1)} \in \mathbb{R}$ für $j \to \infty$. Als Teilfolge der gesamten Folge ist $(a_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt in $\mathbb{R}^n$ und damit ist nach Aufgabenteil (a) auch für $l = 2$ die Folge $(a_{2,m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}$. Nach Auswahl einer weiteren Teilfolge von $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert also auch $(a_{2,m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a^{(2)} \in \mathbb{R}$.

(c): Per Iteration und Auswahl von n Teilfolgen können wir annehmen, dass eine Teilfolge $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)} \in \mathbb{R}$ existieren sodass

$$a_{l,m_j} \longrightarrow a^{(l)} \qquad \text{für } j \to \infty \text{ für alle } l = 1, \ldots, n \text{ gilt.}$$

Schreibe diese Grenzwerte als Vektor $a := (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, dann erhalten wir

$$d(a_{m_j}, a) = \sum_{k=1}^{n} |a_{k,m_j} - a^{(k)}| \longrightarrow 0$$

für $j \to \infty$. ■

Aufgabe 2: *(2 Punkte)* Zeige, dass der *limes inferior* $\liminf$ und der *limes superior* $\limsup$ einer beschränkten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ jeweils wohldefiniert sind, d.h die Grenzwerte aus den Definitionen von $\liminf$ und $\limsup$ existieren jeweils.

Lösung. Wir betrachten nur den $\liminf$, die Behauptung folgt nahezu analog (mit umgedrehter Monotonie) für den $\limsup$.

Die Folge $(\inf\{a_k \mid k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen

$$\inf\{a_k \mid k \geq n\} \leq \inf\{a_k \mid k \geq n+1\} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

monoton wachsend und wegen

$$\inf\{a_k \mid k \geq n\} \leq \sup\{a_k \mid k \geq n\} \leq \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} < \infty \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

nach oben beschränkt. Also muss sie konvergieren und der Grenzwert existiert. ■

Aufgabe 3: *(3 Punkte)* Wir definieren die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 := \sqrt{2}$ und

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n + 2} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Beweise per Induktion nach n, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Berechne dann den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unter Verwendung der Rekursionsvorschrift.

Hinweis: Benutze dazu ohne Beweis, dass die Quadratwurzel monoton wachsend ist.

Lösung. Offenbar gilt $\sqrt{2} \leq 2$ und wenn wir induktiv annehmen, dass $a_n \leq 2$, dann folgt mit dem Hinweis auch, dass

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Analog finden wir für die Monotonie, dass

$$a_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2} \geq \sqrt{2} = a_1$$

und durch die Annahme $a_{n-1} \leq a_n$ erhalten wir außerdem

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \leq \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}.$$

Also existiert für $n \to \infty$ ein Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ (mit ferner $a \leq 2$ nach vorigen Übungsaufgaben). Wir zeigen schließlich, dass $a = 2$ gilt. Dazu bemerken wir, dass

$$a_n^2 = a_n \cdot a_n = a_{n-1} + 2$$

gilt, wobei die linke Seite (unter Verwendung von Rechenregeln für Grenzwerte) gegen a^2 und die rechte Seite gegen $a-2$ strebt. Der Grenzwert erfüllt deswegen die quadratische Gleichung

$$a^2 - a - 2 = 0, \qquad \text{mit Lösungen} \quad a^{(1)} = -1,\ a^{(2)} = 2.$$

Da $a_n \geq a_1 = \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, kann nur $a^{(2)} = 2$ der gesuchte Grenzwert sein. ■